מרתון לוגיקה

**עוצמות**: הגודל של הקבוצה.

1. עוצמות סופיות:

בשונה מ:

בשונה מ:

עוצמות אינסופיות:

1. עוצמות בנות מניה: סימון: . קבוצות שניתן למנות את האיברים בתוכן לפי סדר מסויים כך שלא נפספס אף איבר למרות שהספירה לא תיגמר.  
   כל הקבוצות ששוות לעוצמה של .

דוגמאות:

משפטים:

* איחוד של 2 קבוצות בנות מניה הוא גם קבוצה בת מניה.
* איחוד בכמות בת מניה של קבוצות בנות מניה היא קבוצה בת מניה.  
  דוגמא: אם כל היא בת מניה אז התוצאה תהיה בת מניה.
* מכפלה קרטזית **סופית** של קבוצות בנות מניה היא קבוצה בת מניה.

דוגמא: בת מניה.

* (לא הוכח) מכפלה קרטזית אינסופית של בנות מניה יכולה להיות לא בת מניה.  
   לא בת מניה.
* הערה: גם קבוצות סופיות נקראות בנות מניה. לכן אם אומרים בנות מניה צריך לציין אם זה סופי או אינסופי. הסימון מתייחס רק לבנות מניה אינסופיות.

1. עוצמת הרצף: סימון: . כל הקבוצות ששוות לעוצמה של .

דוגמאות:

אם משפטים (לא הוכח):

* איחוד של 2 עוצמות רצף היא עוצמת רצף.
* איחוד בכמות רצף של קבוצות בעוצמת רצף - עוצמת רצף.
* מכפלה קרטזית סופית של קבוצות בעוצמת רצף - עוצמת רצף.

1. עוצמה גדולה יותר: סימון: . כל הקבוצות ששוות לעוצמת .

דוגמאות:

1. ...

דרכים להוכחת שוויון/ אי-שוויון של עוצמות:

1. ע"י הכלה: אם אז: .
2. "לדמות" את כמות האיברים לאחת הקבוצות המוכרות () או לקבוצה שיותר פשוט לדעת מה עוצמתה.  
   פורמאלית: ע"י פונקציות.

אם אז:  
א. אם חח"ע: .  
ב. אם על: .  
ג. אם חח"ע ועל: .

משפטים נוספים:

1. משפט קנטור ברנשטיין: אם וגם: אז: .  
   מסקנה: מספיק להראות פונקציה חח"ע מ A ל B ומ B ל A.
2. משפט קנטור: .

טיפים וכללי אצבע:

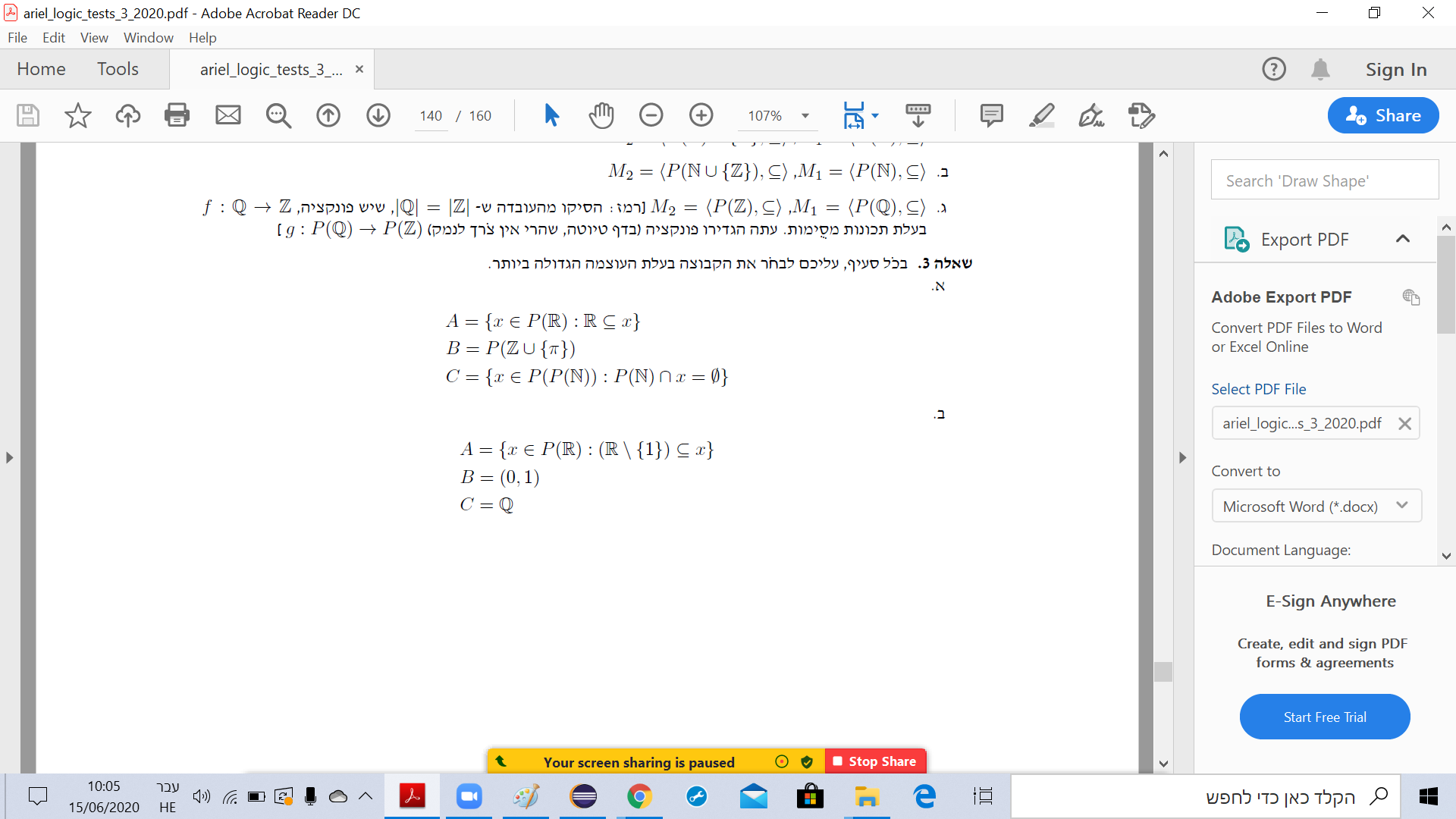
1. אם נתון: אז ניתן לומר: ומכאן: .
2. אם נתון: אז ניתן לומר: ומכאן: .
3. כלל אצבע: בדרך כלל קבוצה שמכילה אינסוף אלמנטים שכל אחד מהם מורכב מאינסוף מרכיבים לא תהיה בת מניה.

דוגמא: ב R, מה שנותן את הכוח אלו אינסוף המספרים שיש להם אינסוף ספרות אחרי הנקודה.  
ב מה שנותח את הכוח אלו אינסוף קבוצות המורכבות כל אחת מהן מאינסוף מספרים.

1. באיחוד ובמכפלה קרטזית התוצאה היא לפי הגדול.  
   דוגמא: , , .

תרגילים: (מהמבחנים האחרונים - איזו קבוצה גדולה יותר, ללא הוכחה)

2020 א' א'



פתרון:

א. ננתח כל קבוצה בנפרד:

הקבוצה A: מכיוון ש: כלומר: וצריך לקיים את התנאי ש: .  
רק מקיים את התנאי. לכן: . לכן: .

הקבוצה B: מתקיים: ומכאן: ולכן: .

הקבוצה C: מתקיים:   
מכיוון ש: אז: ולכן: רק אם .  
מכאן: ולכן: .

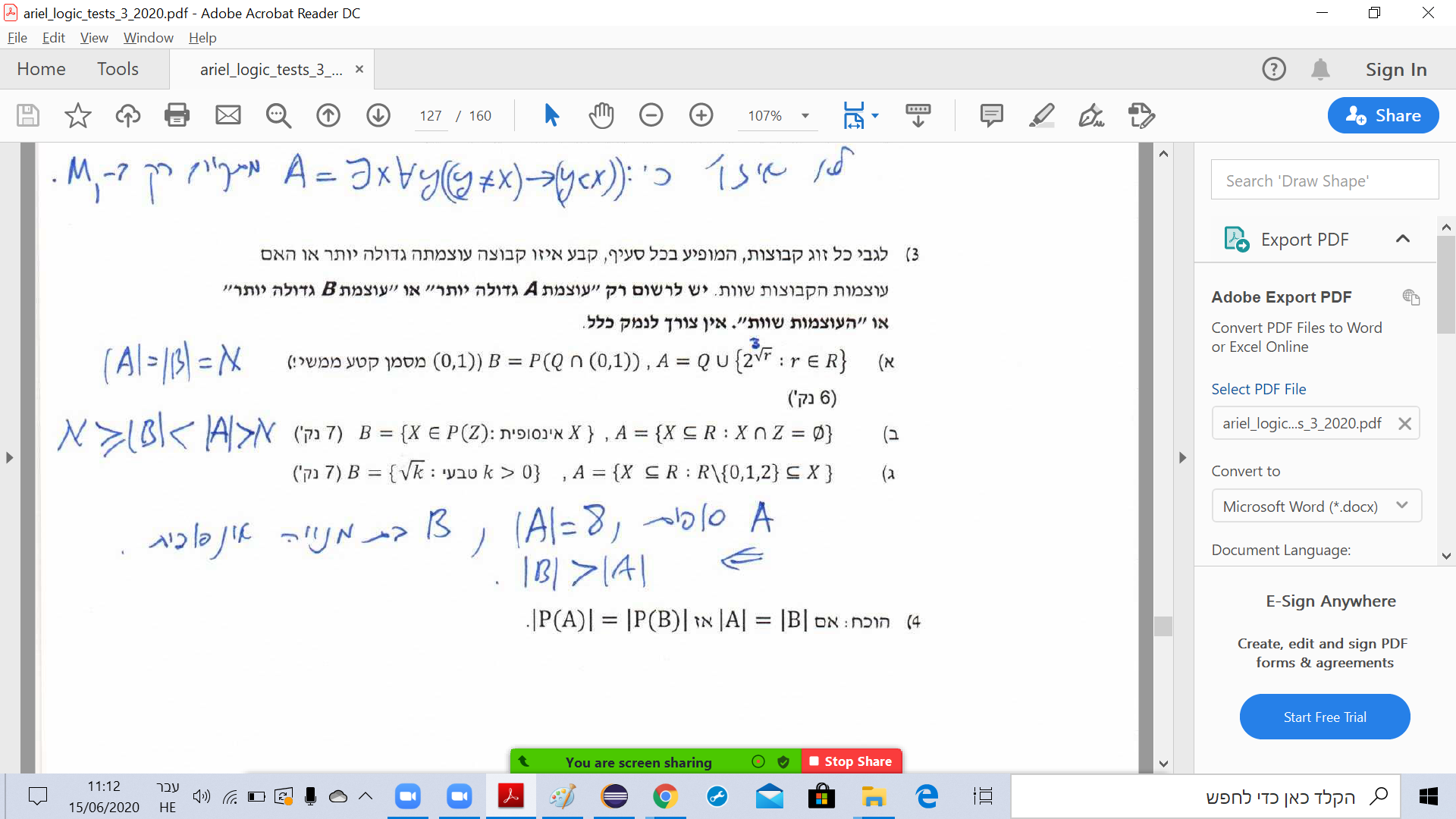
לכן הקבוצה הכי גדולה היא: .

ב. ננתח כל קבוצה בנפרד:  
הקבוצה A: מכיוון ש: כלומר: וצריך לקיים את התנאי ש: .

מכאן, כל האיברים ב R פרט ל 1 חייבים להיות בתוך x ולכן אין חופש בחירה עבורם. לכן האופציות היחידות הן לא להכניס את 1 ל x ואז נקבל: או כן להכניס את 1 ל x ואז: .  
לכן: ולכן: .  
הקבוצה B: כל קטע ב R שווה לעוצמת R ולכן:   
הקבוצה C: מתקיים: .

לכן הקבוצה הכי גדולה היא: .

מבחן 2019 ב' ב'



פתרון:

א. הקבוצה A: מתקיים: .

על כל שנציב נקבל תוצאה שונה ולכן כמות האיברים ב תהיה מקבילה לכמות האיברים ב R. ולכן: ולכן: ולכן: . (משפט קנטור ברנשטיין)  
הקבוצה B: מתקיים: ולכן: . מצד שני: . הקבוצה היא בעוצמת כיוון שכל הצבה של (החל מ 2) תתן תוצאה שונה. ולכן: מכאן: .  
לכן: .

מסקנה: עוצמת A שווה לעוצמת B.

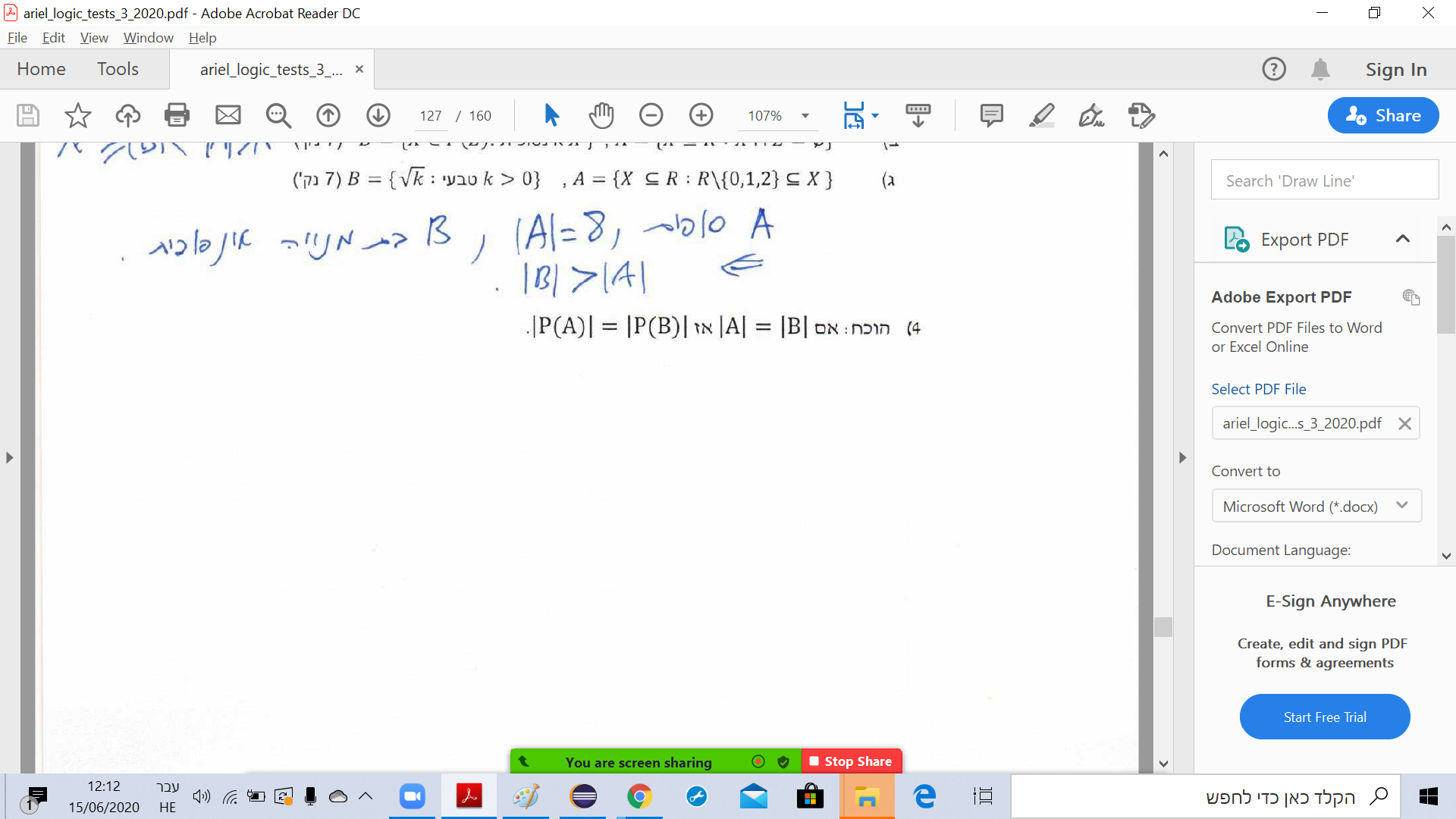
ב. הקבוצה A: מתקיים: ולכן: .   
התנאי אומר שלוקחים ל A את כל תתי הקבוצות של R שלא מכילות מספרים שלמים.  
**כל תת קבוצה** של מקיימת את התנאי. כלומר: כי כל תת קבוצה של נמצאת ב A (כי היא מקיימת את התנאי) ולכן: ולכן: .  
הקבוצה B: מתקיים: ולכן: .

מסקנה: עוצמת A גדולה מעוצמת B.

ג. הקבוצה A: מתקיים וגם . מכאן: ולכן: .  
הקבוצה B: מתקיים: כי עבור כל k טבעי שנציב, נקבל תוצאה שונה.

הוכחה עבור B: מתקיים . נגדיר פונקציה: חח"ע. ומזה ינבע: . מצד שני: ומזה ינבע ש: . ולכן: .  
הפונקציה תהיה: . הוכחה ש f חח"ע: יהיו נניח ש: צ"ל: .  
לפי ההנחה: ולכן: .  
נראה ש: . צד אחד: . לכן: .  
נראה פונקציה חח"ע ע"י: . הוכחה ש f חח"ע: יהיו נניח ש: צ"ל: .  
לפי ההנחה: ולכן: כי מדובר רק במספרים חיוביים. לכן ולכן: .

מבחן 2019 ב' ב'



פתרון: נניח ש: . צ"ל: .

לפי ההנחה: קיימת פונקציה: חח"ע ועל. צ"ל: קיימת פונקציה חח"ע ועל.  
נגדיר: . צ"ל: חח"ע ועל.  
 חח"ע: יהיו . נניח ש: . צ"ל: .  
לפי ההנחה: (1).  
נוכיח ש ע"י הכלה דו כיוונית:  
1. . יהא . צ"ל: .  
מכאן: . לפי (1) מתקיים: .  
מכאן קיים כך ש: אבל נתון ש חח"ע ולכן: . ולכן: .  
כיוון 2: באותו האופן. (להחליף 1 ב 2 ולהחליף 2 ב 1)

במקום להוכיח על. ניתן פשוט לומר שיש פונקציה חח"ע ואז להגדיר את אותה g רק: חח"ע. . ההוכחה תהיה זהה.

טיוטה:

דוגמא:

. .

.